**Binäres Zahlensystem**

In der Mathematik gibt es viele verschiedene Zahlensysteme. Bevor wir uns mit dem für den Computer und die gesamte Digitaltechnik so wichtigen **Binären Zahlensystem** beschäftigen, wollen wir einen Blick auf das Zahlensystem werfen, mit dem du dich sicher schon sehr gut auskennst.

**Dezimalsystem**

Dieses Zahlensystem heißt Dezimalsystem oder Zehnersystem. Es heißt so, weil wir zehn Ziffern zur Verfügung haben, um eine Zahl in dieser Schreibweise darzustellen. Die Ziffern 0 bis 9 reichen aus, um alle möglichen Zahlen aufzuschreiben. Die Zahlen aus diesem System sollten dir geläufig sein. Sie lauten zum Beispiel: 49385, 1375, 206 oder 8.

Insgesamt stehen eigentlich nur zehn Ziffern zur Verfügung. Trotzdem können wir über die Zahl neun hinaus im Dezimalsystem zählen. Beim einfachen Zählen (0, 1, 2, 3, 4, 5,…) ist es daher nötig, sich nach der Ziffer neun etwas Neues zu überlegen.

Die Idee ist einfach: wir nehmen eine zweite Stelle hinzu, für die dasselbe Zählprinzip gilt. Diese zweite Stelle nennt man *„Zehner“* (*Z, 10er*). Da jetzt für beide Stellen jeweils zehn Ziffern zur Verfügung stehen, muss man erst bei 10 **·** 10 = 100 Zahlen eine weitere Stelle hinzufügen. Diese dritte Stelle heißt daher auch *„Hunderter“* (H, 100er). Dieses System geht immer so weiter. Nach 10 **·** 10 **·** 10 = 1000 kommt die vierte Stelle und so weiter.

Zahlen werden also beispielsweise folgendermaßen dargestellt:

1375 = 1000 + 300 + 70 + 5

= 1***·1000*** + 3***·100*** + 7***·10*** + 5***·1***

= [1375]10

206 = 200 + 0 + 6

= 2***·100*** + 0***·10*** + 6***·1***

= [206]10

8 = 8

= 8***·1***

= [8]10

Das heißt, die Zahl 1375 kann man in einen 1000er, drei 100er, sieben 10er und fünf 1er zerlegen. Die Anzahl der 1000er, 100er, 10er und 1er die zur Darstellung einer bestimmten Zahl benötigt werden, können in der folgenden Tabelle in der entsprechenden Spalte eingetragen werden. Diese Zahlen werden als *Vorfaktoren* bezeichnet.

Die Tabelle ist selbstverständlich erweiterbar um auch größere Zahlen darzustellen. Dies soll durch die Pünktchen angedeutet werden.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Dezimalsystem** | | | | | |
| **Zahl** | **…** | **1000** | **100** | **10** | **1** |
|  |  | 10 **·** 10 **·** 10 | 10 **·** 10 | 10 |  |
| **1375** |  | **1** | **3** | **7** | **5** |
| 206 |  | 0 | 2 | 0 | 6 |
| 8 |  | 0 | 0 | 0 | 8 |
| 23 |  |  |  |  |  |
| 546 |  |  |  |  |  |
| 99 |  |  |  |  |  |
| 5681 |  |  |  |  |  |
| 37 |  |  |  |  |  |
| 422 |  |  |  |  |  |

***Aufgabe:***

1) Vervollständige die Tabelle, indem du zu den angegebenen Zahlen die jeweiligen Vorfaktoren in die Tabelle einträgst.

**Das Binärsystem**

Das Binärsystem wird auch Zweiersystem genannt. Es heißt so, da es nur zwei verschiedene Ziffern zur Darstellung von Zahlen benötigt bzw. zur Verfügung hat. Man benutzt die Ziffern 0 und 1.

Die erste bekannte Beschreibung eines Zahlensystems, dass aus zwei Zeichen besteht, stammt von dem alt-indischen Mathematiker Pingala aus dem 3. Jahrhundert v. Chr.. Das Binärsystem in heutiger Form wurde erstmals von Gottfried Willhelm Leibniz Anfang des 18. Jahrhunderts dokumentiert. Jedoch erst im 20. Jahrhundert erlangte das Binärsystem durch die Digitaltechnik große Bedeutung.

In der gesamten Digitaltechnik, also zum Beispiel auch beim Computer, werden Zahlen durch elektrische Zustände dargestellt. Bevorzugt werden zwei komplementäre (gegensätzliche) Zustände verwendet, wie beispielsweise „*Strom an – Strom aus“* oder *„Lampe an – Lampe aus“*. Auf diese Weise können sehr einfache und fehlerunempfindliche

Schaltungen realisiert werden. Diese beiden Zustände lassen sich dann aber auch als Ziffern – hier eben 0 und 1 – darstellen.

Da man in diesem System nur zwei Ziffern zur Verfügung hat, müssen wir uns an dieser Stelle mal überlegen, wie hier gezählt werden kann. Die Zahlen werden im Prinzip ähnlich dargestellt wie im Dezimalsystem oben. Wir haben oben gelernt, dass im Dezimalsystem (Zehnersystem) die Zahlen aus den Vielfachen der Zahl ***10*** (1er, 10er, 100er, 1000er, …) kombiniert werden. Vergleichbar dazu werden im Binärsystem (Zweiersystem) Zahlen immer aus den Vielfachen der Zahl ***2*** (1er, 2er, 4er, 8er, …) zusammengesetzt.

Im Folgenden sollen einige Beispiele das Vorgehen und die Darstellung verdeutlichen:

3 = 2 + 1

= 1***·2*** + 1***·1***

= [11]2

6 = 4 + 2 + 0

= 1***·4*** + 1***·2*** + 0***·1***

= [110]2

11 = 8 + 0 + 2 + 1

= 1***·8*** + 0***·4*** + 1***·2*** + 1***·1***

= [1011]2

Damit man die Zahlen besser lesen kann, werden die Vielfachen der Zahl ***2*** (also 1er, 2er, 4er, 8er, …) weggelassen und nur die Zahlen davor (*Vorfaktoren*) „aneinander gereiht“. Dies kennst du auch schon aus dem Dezimalsystem. Man schreibt ja auch nicht: 1***·1000*** + 3***·100*** + 7***·10*** + 5***·1***, sondern 1375. Die Klammer mit der tief gestellten zwei […]2 soll verdeutlichen, dass zum Beispiel [110]2 nicht 110 im Dezimalsystem bedeutet, sondern 110 im Binärsystem, also 6 im Dezimalsystem.

Im Folgenden sollst du dich selber mit diesem Binärsystem vertraut machen.

***Aufgaben:***

2) Vervollständige nun die Tabelle, indem du alle Zahlen von 0 bis 15 im Binärsystem notierst. Die Ergebnisse aus dem Text sind in der Tabelle schon eingetragen.

3) Erweitere zusätzlich den Kopf der Tabelle (2. Zeile) so, dass man auch größere Zahlen als 15 in die Tabelle eintragen kann.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Dezimalsystem** | | | | **Binärsystem** | | | | |
| **1000** | **100** | **10** | **1** |  | **8** | **4** | **2** | **1** |
| 10 **·** 10 **·** 10 | 10 **·** 10 | 10 |  |  | 2 **·** 2 **·** 2 | 2 **·** 2 | 2 |  |
|  |  |  | 0 |  |  |  |  | 0 |
|  |  |  | 1 |  |  |  |  | 1 |
|  |  |  | 2 |  |  |  |  |  |
|  |  |  | 3 |  |  |  | 1 | 1 |
|  |  |  | 4 |  |  |  |  |  |
|  |  |  | 5 |  |  |  |  |  |
|  |  |  | 6 |  |  | 1 | 1 | 0 |
|  |  |  | 7 |  |  |  |  |  |
|  |  |  | 8 |  |  |  |  |  |
|  |  |  | 9 |  |  |  |  |  |
|  |  | 1 | 0 |  |  |  |  |  |
|  |  | 1 | 1 |  | 1 | 0 | 1 | 1 |
|  |  | 1 | 2 |  |  |  |  |  |
|  |  | 1 | 3 |  |  |  |  |  |
|  |  | 1 | 4 |  |  |  |  |  |
|  |  | 1 | 5 |  |  |  |  |  |

Wir wollen herausfinden, wie der Computer mit nur zwei Ziffern rechnen kann. Dazu müssen wir zunächst einmal verstehen, wie das uns bekannte Dezimalsystem in das Zweiersystem umgerechnet wird.

4) Wähle jetzt beliebige Zahlen zwischen 0 und 511 im Dezimalsystem aus, die du deinen Nachbarn ins Zweiersystem schreiben lässt. Kontrolliere anschließend.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Dezimalsystem** | | | **Binärsystem** | | | | | | | | | |
| **100** | **10** | **1** |  |  |  | **32** | **16** | **8** | **4** | **2** | **1** |
| 10 **·** 10 | 10 |  |  |  |  |  |  | 2 **·** 2 **·** 2 | 2 **·** 2 | 2 |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

**Addition mit binären Zahlen**

Genau wie ein Computer arbeitet auch ein Taschenrechner im Binärsystem. Wenn man den Taschenrechner bedient, sieht man davon nichts. Die eingegebene Dezimalzahl wird vom Taschenrechner blitzschnell umgerechnet in eine binäre Zahl, so wie das in den letzten Aufgaben oben auch von euch durchgeführt wurde. Anschließend wird im Binärsystem eine Rechenoperation, zum Beispiel eine Addition, durchgeführt. Wir wollen uns daher nun einmal anschauen, wie eine Addition im Taschenrechner wirklich abläuft, bevor das Ergebnis wieder in das Dezimalsystem umgerechnet wird.

Die Addition funktioniert sehr ähnlich zu der im Dezimalsystem. Wenn sich beim schriftlichen Addieren einer Zahl im Dezimalsystem an einer Stelle eine „10“ oder größere Zahl ergibt, dann notiert man an der Stelle nur die „0“ (oder die jeweilige hintere Ziffer) und erhält für die vordere Stelle den so genannten Übertrag „1“.

Analog dazu muss man im Binärsystem vorgehen. Es ist lediglich zu beachten, dass beim Ergebnis „2“ keine „2“ an der jeweiligen Stelle notiert wird (im Binärsystem existiert das Zeichen oder die Ziffer „2“ ja gar nicht), sondern eine „0“ und ein Übertrag „1“ auf die nächste Stelle.

***Beispiele***:

1. Wir wollen die Zahlen 5 und 7 addieren.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Dezimalsystem** | | | | **Binärsystem** | | | | | |
| **1000** | **100** | **10** | **1** | **32** | **16** | **8** | **4** | **2** | **1** |
|  |  |  | 5 |  |  |  | 1 | 0 | 1 |
| **+** |  | 7 | **+** |  | 1 | 1 | 1 |
| Übertrag | 1 |  | Übertrag | 1 | 1 | 1 |  |
| Ergebnis | 1 | 2 | Ergebnis | 1 | 1 | 0 | 0 |

***Beachte:***

1+1+1 = 0+1 = 1, wobei ein Übertrag in die nächste Spalte eingetragen werden muss.

2. Addition der Zahlen 9 und 5

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Dezimalsystem** | | | | **Binärsystem** | | | | | |
| **1000** | **100** | **10** | **1** | **32** | **16** | **8** | **4** | **2** | **1** |
|  |  |  | 9 |  |  | 1 | 0 | 0 | 1 |
| **+** |  | 5 | **+** |  | 1 | 0 | 1 |
| Übertrag | 1 |  | Übertrag |  |  | 1 |  |
| Ergebnis | 1 | 4 | Ergebnis | 1 | 1 | 1 | 0 |

3. Addition der Zahlen 154 und 54

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Dezimalsystem** | | | | **Binärsystem** | | | | | | | | | |
| **1000** | **100** | **10** | **1** | **512** | **256** | **128** | **64** | **32** | **16** | **8** | **4** | **2** | **1** |
|  | 1 | 5 | 4 |  |  | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| **+** |  | 5 | 4 | **+** |  |  | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| Übertrag | 1 |  |  | Übertrag |  | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |  |  |
| Ergebnis | 2 | 0 | 8 | Ergebnis | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |

***Aufgabe***:

5) Rechne zur Übung folgende Aufgaben im Binärsystem. Notiere auch den Übertrag!

a) 3 + 5

b) 9 + 18

c) 10 + 2

d) 20 + 15

e) 22 + 31

Prüfe direkt ob dein Ergebnis richtig ist, indem du die Rechenaufgabe auch im Dezimalsystem rechnest und dein Ergebnis in das Binärsystem umwandelst.